7 класс

Задача 7.1. Маша идёт в гости.

Первую часть своего пути до домика Медведя девочка Маша шла пешком. Оставшийся путь ей помогли преодолеть волки на своей машине «Скорой помощи», чья скорость была в 5 раз больше, чем скорость девочки. Зная, что на первую часть пути девочка потратила 3/4 всего времени своего путешествия, а средняя скорость на всём пути до домика Медведя составила 5 м/с, определите: 1) скорость, с которой шла Маша, 2) какую часть всего пути до домика Медведя девочка шла пешком.

Ответ: 1) 2,5 м/с; 2) 3/8.

Решение: Пусть v — скорость Маши, тогда скорость «Скорой» будет равна $5v$. Обозначив за t общее время путешествия Маши, получим, что полный путь, пройденный девочкой, составляет

$$s = v \cdot \frac{3t}{4} + 5v \cdot \frac{t}{4} = 2vt.$$

С другой стороны, средняя скорость Маши равна $v_{\text{ср}} = s/t$, откуда следует, что

$$v_{\text{ср}} = \frac{2vt}{t} = 2v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v_{\text{ср}}}{2} = 2{,}5 \text{ м/с}.$$

Девочка прошла пешком путь, равный

$$s_1 = v \cdot \frac{3t}{4} = \frac{3vt}{4},$$

поэтому первый участок составил $s_1/s = 3/8$ от всего пути.

Критерии:

1) Записана формула $s = v \cdot \frac{3t}{4} + 5v \cdot \frac{t}{4}$ или её аналог . . . . 3 балла

2) Найдено верное значение скорости Маши . . . . 4 балла

3) Найдено верное значение доли пути, которую Маша шла пешком . . . . 3 балла

Задача 7.2. За двумя зайцами.
Вернувшись с рыбалки домой, Медведь обнаружил в огороде двух зайцев, бесцеремонно собирающих урожай моркови и капусты. Увидев Медведя, зайцы одновременно бросились бежать в противоположные стороны. Первый с ведром моркови побежал со скоростью 6 м/с, а второй с мешком капусты — со скоростью 4 м/с. Подумав немного, за кем бежать, Медведь бросился вдогонку за зайцем с морковью, через 2 мин догнал его, отобрал овощи и отчитал воришку в течение 40 с, затем побежал догонять второго.
1. Через какое время **после этого** он догонит второго зайца?
2. Сколько времени Медведь обдумывал, за кем ему побежать в первую очередь?
Скорость Медведя во время погони всегда равна 7 м/с. Считать, что все персонажи начали бежать из одной точки и движутся вдоль одной прямой.

Ответ: 1) 520 с; 2) 20 с.

Решение: Обозначим скорости первого и второго зайцев как v_1 и v_2, а скорость Медведя как u. Пусть t_0 — время, в течение которого Медведь обдумывал, за кем бежать. За это время первый заяц успел убежать на расстояние $v_1 t_0$. Так как Медведь догнал его за 120 с,

$$(u - v_1) \cdot 120\ \text{с} = v_1 t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{(u - v_1) \cdot 120\ \text{с}}{v_1} = \frac{(7\ \text{м/с} - 6\ \text{м/с}) \cdot 120\ \text{с}}{6\ \text{м/с}} = 20\ \text{с}.$$

В общей сложности погоня за первым зайцем и его воспитание длилось 20 с + 120 с + 40 с = 180 с. За это время второй заяц убежал от точки старта на расстояние $v_2 \cdot 180$ с = 720 м. С другой стороны, сам Медведь находится от неё на расстоянии $v_1 \cdot 140$ с = 840 м, следовательно, между ним и вторым зайцем 720 м + 840 м = 1560 м. Отсюда найдём, что второго зайца он догонит через

$$t = \frac{1560\ \text{м}}{u - v_2} = \frac{1560\ \text{м}}{3\ \text{м/с}} = 520\ \text{с}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $(u - v_1) \cdot 120\ \text{с} = v_1 t_0$ или его аналог . . . . 2 балла
2) Найдено верное значение t_0 . . . . 2 балла
3) Правильно найдено расстояние, на которое успел убежать второй заяц перед началом погони за ним 2 балла
4) Правильно найдено расстояние между Медведем и вторым зайцем перед началом погони . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение t . . . . 2 балла

Указание проверяющим:
1) Формула из пункта 1 критериев может быть сразу записана внутри расчёта времени t_0. В этом случае баллы за пункт 1 ставить.
2) Расчёты, необходимые для пунктов 3 и/или 4 также могут быть сделаны внутри формулы для t. Например, в пункте 4 расстояние между Медведем и зайцем может записано просто как 720 + 840. В этом случае баллы за пункты 3 и/или 4 ставить.

Задача 7.3. Обычное дело.
Мальчик Паша поехал с родителями на дачу. Сначала дорога была свободной, и скорость движения автомобиля составила 72 км/ч. Но затем автомобиль попал в пробку и двигался со скоростью 240 м/мин втрое дольше по времени, чем занял первый участок. Оставшийся отрезок пути до дачи был посвободнее, и автомобиль смог разогнаться до скорости 15 м/с. Определите, какую часть всего пути от дома до дачи автомобиль был в пробке, если время, затраченное на поездку, оказалось в 2 раза больше, чем в случае, когда автомобиль проехал бы весь путь с первоначальной скоростью.

Ответ: 3/14.

Решение: Пусть t — время, которое бы ушло на поездку с первоначальной скоростью $v_1 = 72$ км/ч $= 20$ м/с. Тогда расстояние от дома до дачи равно $s = v_1 t$. Если на первом участке пути автомобиль двигался в течение времени t_1, в пробке он находился время $3t_1$, а на последний участок ушло $2t - 4t_1$. Расстояние от дома до дачи в этом случае будет выражаться формулой

$$s = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1),$$

где $v_2 = 4$ м/с и $v_3 = 15$ м/с — скорости в пробке и на последнем отрезке пути. Приравнивая оба выражения для s, получим, что

$$v_1 t = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1) \quad \Rightarrow \quad 20t = 20t_1 + 12t_1 + 30t - 60t_1 \quad \Rightarrow \quad 28t_1 = 10t \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{5t}{14}.$$

Найдём теперь долю пути, которую автомобиль пробыл в пробке:

$$\frac{s_2}{s} = \frac{v_2 \cdot 3t_1}{v_1 t} = \frac{15 v_2}{14 v_1} = \frac{60}{14 \cdot 20} = \frac{3}{14} \approx 0{,}214.$$

Критерии:

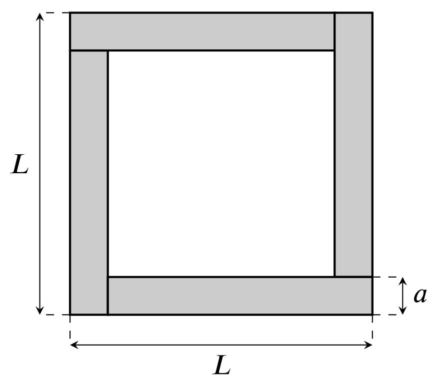
1) Записана формула $s = v_1 t$ или её аналог . . . . 1 балл
2) Записано выражение для времени на третьем участке пути: $t_3 = 2t - 4t_1$ или аналогичное . . . . 1 балл
3) Записана формула $s = v_1 t_1 + v_2 \cdot 3t_1 + v_3(2t - 4t_1)$ или её аналог . . . . 3 балла
4) Найдена верная связь между t_1 и t . . . . 3 балла
5) Правильно найдена доля пути в пробке . . . . 2 балла

Указания проверяющим:
Учащийся в пунктах 1-4 может выражать все величины не через t_1, как в авторском решении, а через, например, t_2. Если записаны верные формулы для s, t_3 и т.д., где величины выражены через t, t_2 и скорости, баллы за соответствующие пункты ставить.

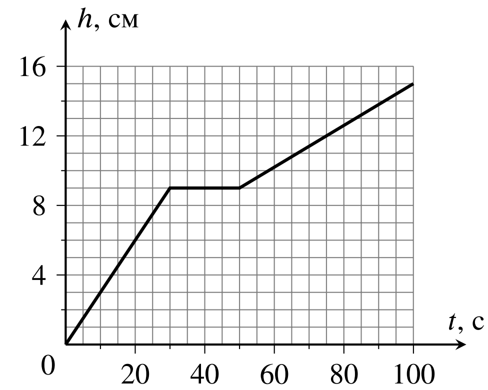
Задача 7.4. У колодца.

На дне пустого аквариума находится «колодец» — открытый сверху сосуд, стенки которого сложены из четырёх одинаковых толстых прямоугольных пластин (на рис. 7.1а изображён вид сверху). Пластины склеены между собой и с дном аквариума так, что вода сквозь швы внутрь «колодца» не протекает. В аквариум (снаружи от «колодца») со скоростью 45 мл/с начинают наливать воду. Используя график зависимости высоты уровня воды вблизи стенок аквариума от времени, приведённый на рис. 7.1б, определите: 1) площадь дна аквариума S, 2) высоту «колодца» H и длину стороны его основания L, 3) толщину стенок «колодца» a.

Стенки аквариума и стенки «колодца» вертикальны.



а)



б)

Рис. 7.1.

Ответ: 1) 375 см^2; 2) 9 см, 15 см; 3) 2,5 см.

Решение: Первый участок графика соответствует подъёму уровня воды снаружи от «колодца», второй участок — наполнению «колодца», а третий участок — подъёму уровня воды по всей площади сосуда. По второму (горизонтальному) участку графика определяем, что высота «колодца» $H = 9$ см, а его внутренний объём равен 45 см^3/с · 20 с = 900 см^3. Площадь дна внутри «колодца», соответственно, равна 900 см^3/9 см = 100 см^2. Так как это внутреннее пространство имеет форму квадрата, то его сторона равна 10 см.

Чтобы найти площадь дна сосуда, рассмотрим третий участок графика. Там за 50 с уровень воды поднимается на 6 см, поэтому

$$S \cdot 6\text{ см} = 45\text{ см}^3/\text{с} \cdot 50\text{ с} \quad \Rightarrow \quad S = 375\text{ см}^2.$$

Аналогично рассмотрим первый участок графика. Там за 30 с уровень воды поднимается на 9 см, следовательно площадь дна снаружи «колодца» S_1 равна:

$$S_1 \cdot 9\text{ см} = 45\text{ см}^3/\text{с} \cdot 30\text{ с} \quad \Rightarrow \quad S_1 = 150\text{ см}^2.$$

Отсюда найдём, что $S - S_1 = 225$ см^2 дна занято «колодцем», и сторона его основания равна 15 см (так как $15 \times 15 = 225$). Толщина стенок равна, соответственно,

$$a = \frac{15\text{ см} - 10\text{ см}}{2} = 2{,}5\text{ см}.$$

Критерии:

1) Найдено верное значение H . . . . 1 балл
2) Найдено верное значение площади дна внутри «колодца» . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение площади всего дна . . . . 2 балла
4) Найдено верное значение площади дна снаружи «колодца» . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение L . . . . 1 балл
6) Найдено верное значение a . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Если в пункте 2 вместо площади внутренней части дна найдена сразу сторона квадрата (10 см), баллы за этот пункт ставить.

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. «Тяжёлые» доли.

Автомобиль на первом участке, равном трети всего пути, ехал со скоростью v, на втором участке — со скоростью $2v$, а на третьем участке, занявшем половину **всего времени** — со скоростью $v/2$. Средняя скорость автомобиля на всём пути оказалась равна 45 км/ч.

1. Чему равнялась скорость автомобиля на первой трети пути?
2. Какую часть всего пути и какую часть всего времени автомобиль двигался на втором участке?

Ответ: 1) 48 км/ч; 2) 2/5 пути и 3/16 времени.

Решение: Пусть t_1 — время, затраченное автомобилем на первой трети пути. Так как первый участок равен трети всего пути s, $s = 3vt_1$. Время, ушедшее на весь путь, следовательно, равно $t = s/v_{\text{ср}} = 3vt_1/v_{\text{ср}}$. Найдём длины двух оставшихся участков:

$$s_2 = 2v\left(\frac{t}{2} - t_1\right) = 2vt_1\left(\frac{3v}{2v_{\text{ср}}} - 1\right),$$

$$s_3 = \frac{v}{2}\cdot\frac{t}{2} = \frac{3v^2t_1}{4v_{\text{ср}}}.$$

Поскольку $s_2 + s_3 = 2s/3 = 2vt_1$, получим, что

$$2vt_1\left(\frac{3v}{2v_{\text{ср}}} - 1\right) + \frac{3v^2t_1}{4v_{\text{ср}}} = 2vt_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3v}{2v_{\text{ср}}} - 1 + \frac{3v}{8v_{\text{ср}}} = 1 \quad\Rightarrow\quad v = \frac{16v_{\text{ср}}}{15} = 48\text{ км/ч}.$$

Время, затраченное на первом участке, равно

$$t_1 = \frac{v_{\text{ср}}t}{3v} = \frac{5t}{16},$$

следовательно, $t_2 = t/2 - t_1 = 3t/16$.
С другой стороны, длина второго участка равна $s_2 = 2vt_2 = 3vt/8$ или, учитывая, что $s = 3vt_1 = 15vt/16$,

$$s_2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{16s}{15} = \frac{2s}{5}.$$

Критерии:

1) Записана формула $s = 3vt_1$ или аналог . . . . 1 балл
2) Записана формула $s_2 = 2v(t/2 - t_1)$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записана формула $s_3 = vt/4$ или аналог . . . . 1 балл
4) Найдено верное значение скорости на первом участке . . . . 3 балла
5) Правильно найдено, какую долю пути составил второй участок . . . . 2 балла
6) Правильно найдено, какую долю времени автомобиль ехал на втором участке . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Учащийся в пунктах 1-3 может выражать все величины не через t_1, как в авторском решении, а через, например, t_2. Если записаны верные выражения для s, s_2 и/или s_3, выраженные через v, t_2 и t, баллы за соответствующие пункты ставить.

2) Если учащийся привёл какое-либо корректное решение и получил верное значение скорости в пункте 4, но не получил в явном виде что-либо из указанного в пунктах 1-3, баллы за соответствующий пункт всё равно выставляются.

Задача 8.2. Переливание жидкости.

Два открытых сверху цилиндрических сосуда одинаковой высоты $H = 48$ см, площади поперечного сечения которых отличаются в 3 раза, соединены друг с другом внизу тонкой горизонтальной трубкой с вентилем (рис. 8.1). Вначале вентиль закрыт. Узкий сосуд доверху заполняют водой, а широкий также доверху заполняют керосином. Вентиль медленно открывают. Найдите высоту оставшегося столба воды в узком сосуде. Плотность керосина равна 800 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Объёмом жидкости в соединительной трубке можно пренебречь.

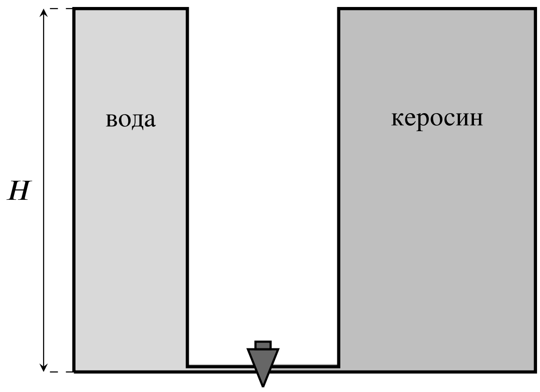


Рис. 8.1.

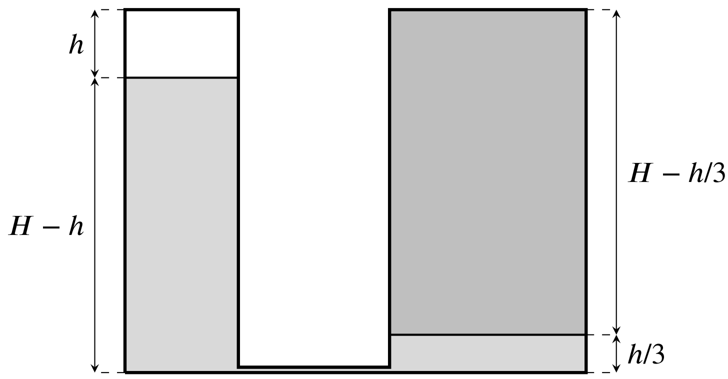


Рис. 8.2.

Ответ: 39 см.

Решение: После открытия вентиля часть воды перельётся в широкий сосуд, а часть керосина выльется. Пусть уровень воды в узком сосуде понизился на h (рис. 8.2). Тогда высота столба воды в широком сосуде станет равна $h/3$, а высота столба керосина $H - h/3$. Запишем условие равенства давлений на уровне соединительной трубки:

$$\rho_{\text{в}} g(H-h) = \rho_{\text{в}} g \cdot \frac{h}{3} + \rho_{\text{к}} g\left(H - \frac{h}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}})H = (4\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}) \cdot \frac{h}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{3H(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}})}{4\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}} = \frac{3 \cdot 48\text{ см} \cdot 0{,}2}{3{,}2} = 9\text{ см}.$$

Высота столба воды в узком сосуде, соответственно, равна 48 см − 9 см = 39 см.

Критерии:

1) Указано, что высота столба воды справа втрое меньше изменения высоты столба слева . . . . 2 балла
2) Правильно записано условие равенства давлений . . . . 5 баллов
3) Найдена высота оставшего столба воды слева . . . . 3 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 1 указание может быть сделано, например, на чертеже или сразу в условии равенства давлений. В этом случае балл за пункт 1 ставить.
2) Условие равенства давлений может быть записано не на уровне трубки, а на уровне нижней границы керосина. Если условие записано верно, баллы в пункте 2 ставить в полном объёме.
3) В пункте 2 условие равенства давлений должно быть записано с учётом всех необходимых высот и плотностей жидкостей. Если оно записано в неком «общем» виде, например $p_{\text{лев}} = p_{\text{прав}}$, то баллы за пункт 2 не ставятся.

Задача 8.3. По следам Архимеда.

У экспериментатора Иннокентия Иванова есть ювелирное украшение, одна часть которого сделана из серебра, а другая — из стали. Учёный, подвесив украшение с помощью непроводящей тепло нити на крюке динамометра и нагрев его в кипятке, погрузил в воду с температурой 25 ℃, находящуюся в калориметре. В результате экспериментов Иннокентия выяснилось, что вес украшения, полностью погружённого в воду, равен 0,72 Н, а установившаяся температура в калориметре стала 30 ℃. Определите массу серебра и массу стали в украшении, если масса воды в калориметре равна 100 г, и она из сосуда не выливалась. Плотность стали равна 7,8 г/см^3, её удельная теплоёмкость — 500 Дж/(кг · ℃); плотность серебра — 10,5 г/см^3, его удельная теплоёмкость — 250 Дж/(кг · ℃); плотность воды — 1 г/см^3, её удельная теплоёмкость — 4200 Дж/(кг · ℃). Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг, теплообменом со стенками калориметра и окружающей средой пренебречь.

Ответ: 42 г серебра и 39 г стали.

Решение: Пусть m_{Fe} и m_{Ag} — массы стальной и серебряной части украшения. Объём украшения равен

$$V = \frac{m_{Fe}}{\rho_{Fe}} + \frac{m_{Ag}}{\rho_{Ag}},$$

а его вес в воде, соответственно,

$$P = (m_{Fe} + m_{Ag})g - \rho_{\text{в}} gV = m_{Fe} g \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{Fe}}\right) + m_{Ag} g \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{Ag}}\right) =$$

$$= m_{Fe} g \left(1 - \frac{1}{7{,}8}\right) + m_{Ag} g \left(1 - \frac{1}{10{,}5}\right) = \frac{34 m_{Fe} g}{39} + \frac{19 m_{Ag} g}{21}.$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}} \cdot 0{,}1\ \text{кг} \cdot (30\,℃ - 25\,℃) = c_{Fe} m_{Fe} (100\,℃ - 30\,℃) + c_{Ag} m_{Ag} (100\,℃ - 30\,℃) \quad \Rightarrow \quad 2m_{Fe} + m_{Ag} = \frac{4200 \cdot 0{,}1 \cdot 5}{70 \cdot 250}\ \text{кг} = 120\ \text{г}.$$

Учитывая условие, что

$$P = 0{,}72\ \text{Н} \quad \Rightarrow \quad \frac{34 m_{Fe}}{39} + \frac{19 m_{Ag}}{21} = 72\ \text{г},$$

и решая систему, получим

$$m_{Fe} = 39\ \text{г}, \qquad m_{Ag} = 42\ \text{г}.$$

Критерии:

1) Записано правильное выражение для объёма украшения V через массы и плотности . . . . 1 балл
2) Записано выражение для веса украшения в воде $P = (m_{Fe} + m_{Ag})g - \rho_{\text{в}} gV$ или аналог . . . . 2 балла
3) Правильно записано уравнение теплового баланса для системы «украшение-вода» . . . . 3 балла
4) Найдено верное значение массы стали . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение массы серебра . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Если учащийся всё выражает не через массы, а через объёмы стали и серебра, то в пункте 1 должно быть «Записано правильное выражение для массы украшения через объёмы и плотности», а пункт 4 дробится на «Найдено верное значение объёма стали» (1 балл) и «Вычислено верное значение массы стали» (1 балл). Аналогично нужно поступить с пунктом 5. Для ориентировки: $V_{Fe} = 5$ см^3, $V_{Ag} = 4$ см^3.

Задача 8.4. Равновесие на блоках.

Однородный рычаг массой $M = 360$ г подвешен к системе блоков так, как показано на рис. 8.3. Груз какой массы m нужно подвесить к левому концу рычага, чтобы система находилась в равновесии? Массой блоков и нитей пренебречь. Для удобства на стержень нанесены штрихи, делящие его на равные части. Трение в системе отсутствует.

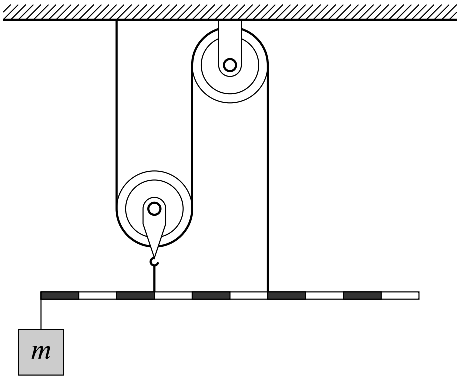


Рис. 8.3.

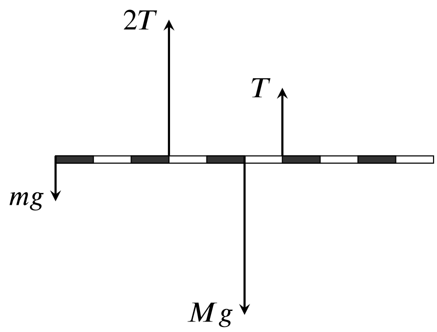


Рис. 8.4.

Ответ: 90 г.

Решение: На рычаг действуют четыре силы: сила тяжести Mg, вес груза mg и силы натяжения удерживающих нитей (рис. 8.4). Так как левый блок — подвижный, сила натяжения левой нити в два раза больше силы натяжения правой. Сумма сил, направленных вверх, равна сумме сил, направленных вниз

$$(m + M)g = 3T.$$

Запишем правило моментов относительно, например, левого конца рычага (L — длина одного деления)

$$2T \cdot 3L + T \cdot 6L = Mg \cdot 5L \quad \Rightarrow \quad T = \frac{5Mg}{12}.$$

Отсюда следует, что

$$(m + M)g = \frac{5Mg}{4} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{4} = 90 \text{ г.}$$

Критерии:

1) Указано, что сила натяжения левого подвеса вдвое больше силы натяжения правого . . . . 1 балл
2) Правильно изображены все силы, действующие на рычаг . . . . 1 балл
3) Записано условие равенства сил, действующих на рычаг $(m + M)g = 3T$ или аналог . . . . 3 балла
4) Правильно записано правило моментов относительно какой-либо точки . . . . 3 балла
5) Найдено верное значение массы m . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 1 указание на то, что силы отличаются вдвое, может быть сделано на рисунке, или данный факт может быть сразу использован в записи условий равновесия. В этом случае балл за пункт 1 ставится.

2) Если отсутствует чертёж с изображением всех сил, действующих на рычаг (совсем нет рисунка или он неполный/неверный), балл за пункт 2 не ставить, но остальные пункты оценивать независимо.

3) В пункте 3 вместо условия равенства сил может быть правильно записано правило моментов относительно иной, чем в пункте 4, точки. В этом случае баллы за пункт 3 ставить.

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Бегуны.
Крош и Бараш как-то устроили забег. Стартовав одновременно из одной точки, они побежали по лесной дорожке. Бараш, набрав некоторую скорость, удерживал её в течение всей дистанции, в то время как Крош бежал, всё время увеличивая свою скорость. Дотошный Лосяш, судивший забег, изобразил графики движения соревнующихся Смешариков (начало графика изображено на рис. 9.1).
1. Определите, через какое время после старта Крош догонит Бараша.
2. На каком расстоянии от точки старта это произойдёт?
3. На какое максимальное расстояние Бараш опережал Кроша в течение этого забега?

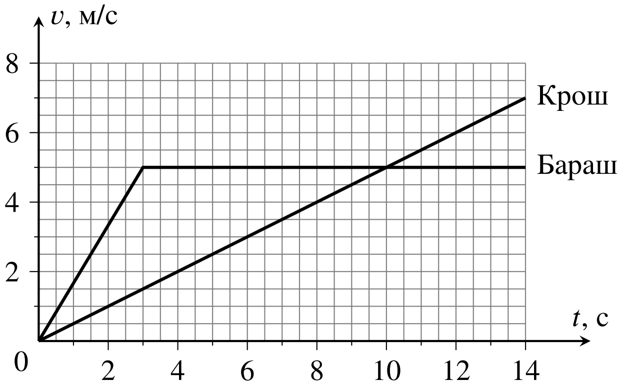


Рис. 9.1.

Ответ: 1) 18,4 с; 2) 84,3 м; 3) 17,5 м.

Решение: Крош бежал всю дорогу с постоянным укорением $a = (7 \text{ м/с})/(14 \text{ с}) = 0{,}5 \text{ м/с}^2$. Бараш первые 3 с бежал равноускоренно и пробежал расстояние $s_0 = 1/2 \cdot 5 \text{ м/с} \cdot 3 \text{ с} = 7{,}5$ м, а дальше он двигался с постоянной скоростью $v_0 = 5$ м/с. Так как вначале Бараш бежал быстрее Кроша, расстояние между ними увеличивалось и стало максимальным в момент, когда скорости Смешариков сравнялись (через 10 с после старта). Максимальное расстояние ΔL, на которое Бараш опережал Кроша, можно найти как площадь области, ограниченной графиками:

$$\Delta L = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ м/с} \cdot (10 \text{ с} - 3 \text{ с}) = 17{,}5 \text{ м}.$$

Крош догонит Бараша уже после этого. Пусть это произошло в момент t, тогда

$$\frac{at^2}{2} = s_0 + v_0(t - 3 \text{ с}) \quad \Rightarrow \quad 0{,}25 \text{ м/с}^2 \cdot t^2 = 5 \text{ м/с} \cdot t - 7{,}5 \text{ м} \quad \Rightarrow \quad t^2 - 20 \text{ с} \cdot t + 30 \text{ с}^2 = 0.$$

Решая это уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получим, что

$$t = \left(10 + \sqrt{70}\right) \text{ с} \approx 18{,}4 \text{ с}.$$

Соответственно, встреча произошла на расстоянии $L = at^2/2 = 0{,}25 \text{ м/с}^2 \cdot (18{,}4 \text{ с})^2 \approx 84{,}3$ м.

Критерии:
1) Найдено верное значение ускорения Кроша . . . . 1 балл
2) Правильно записано уравнение, достаточное для определения времени встречи . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение времени встречи . . . . 2 балла
4) Найдено верное значение расстояния от старта до места встречи . . . . 1 балл
5) Указано, что расстояние между Смешариками будет максимальным через 10 с после старта . . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение максимального расстояния между Барашем и Крошем . . . . 2 балла

Задача 9.2. Паша экспериментирует.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша спаял схему, изображённую на рис. 9.2. К точкам C и D он подсоединил выводы мультиметра. В результате измерений Паши оказалось, что в режиме вольтметра мультиметр показывает 6 В, а в режиме амперметра — 5 мА. Чему равно сопротивление резистора R_x, если $R = 700$ Ом? Мультиметр в обоих режимах можно рассматривать как соответствующий идеальный прибор. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

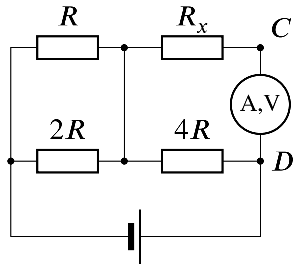


Рис. 9.2.

Ответ: 800 Ом.

Решение: Рассмотрим случай, когда мультиметр включён в режиме вольтметра. Напряжение на резисторе $4R$ равно 6 В, а общее сопротивление равно $R\cdot 2R/(R+2R)+4R = 14R/3$. Следовательно, напряжение на источнике равно

$$U_0 = \frac{6\ \text{В}}{4R}\cdot\frac{14R}{3} = 7\ \text{В}.$$

Во втором случае, когда мультиметр включён в режиме амперметра, сила тока через резистор R_x равна $I_0 =$ $= 5$ мА. Сила тока через резистор $4R$, соответственно, составляет $I_{4R} = I_0R_x/(4R)$. На левой паре параллельных резисторов R и $2R$ суммарный ток $I_0 + I_{4R}$ делится в отношении $2 : 1$, и, например, сила тока через резистор R равна

$$I_R = \frac{2(I_0 + I_{4R})}{3} = \frac{2I_0}{3}\left(1 + \frac{R_x}{4R}\right).$$

Определим отсюда общее напряжение в цепи и приравняем его U_0:

$$U_0 = I_RR + I_0R_x = \frac{2I_0R}{3} + \frac{7I_0R_x}{6} \quad\Rightarrow\quad R_x = \frac{6}{7I_0}\left(U_0 - \frac{2I_0R}{3}\right) = 800\ \text{Ом}.$$

Критерии:

1) Найдено верное значение напряжения источника U_0 . . . . 2 балла
2) Записано верное выражение для тока через $4R$ во втором случае . . . . 2 балла
3) Записано верное выражение для тока через какой-либо левый резистор во втором случае . . . . . . 2 балла
4) Записана верная связь между U_0, током через R_x во втором случае и сопротивлениями . . . . 2 балла
5) Получено верное значение R_x . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) В пункте 1 достаточно найти, что $U_0 = 7/6\cdot U_V$, где U_V — показание вольтметра. Балл в этом случае ставится.
2) Если учащийся смог каким-либо иным (не авторским, но корректным) способом получить верную связь из пункта 4, баллы за пункты 2 и 3 ставить автоматически.

Задача 9.3. Ох уж эти зайцы!

Девочка Маша и заяц нашли как-то на поляне бревно длиной 2 м. Положив это бревно на опору и усевшись на его противоположных концах, они стали качаться. Оказалось, что бревно находится в равновесии, когда Маша сидит на расстоянии 50 см от точки опоры. Тут из леса выбежал второй заяц, заявил, что тоже хочет качаться, и уселся на 30 см впереди первого. Чтобы восстановить равновесие бревна девочке пришлось отодвинуть точку опоры от себя на 10 см.

1. Определите массу бревна, считая его прямым и однородным.
2. На сколько сантиметров Маше придётся сдвинуть ещё раз точку опоры (относительно предыдущего случая), чтобы восстановить равновесие бревна, когда третий заяц сядет на него на 30 см впереди второго?

Масса Маши равна 39 кг, а массы всех зайцев одинаковы.

Ответ: 1) 21 кг; 2) 6,2 см.

Решение: Пусть масса бревна равна M, масса Маши — $m_{\text{М}}$, а масса одного зайца — m_0. Запишем в первом случае правило моментов относительно точки опоры, учитывая, что сила тяжести приложена к середине бревна:

$$m_0 g \cdot 150\text{ см} + Mg \cdot 50\text{ см} = m_{\text{М}} g \cdot 50\text{ см} \quad \Rightarrow \quad 3m_0 + M = m_{\text{М}}.$$

Во втором случае Маша сидит на расстоянии 60 см от точки опоры, первый заяц — на расстоянии 140 см, а второй — на расстоянии 110 см. Запишем ещё раз правило моментов:

$$m_0 g \cdot 140\text{ см} + m_0 g \cdot 110\text{ см} + Mg \cdot 40\text{ см} = m_{\text{М}} g \cdot 60\text{ см} \quad \Rightarrow \quad 250m_0 + 40M = 60m_{\text{М}}.$$

Решая полученную систему, получим, что $M = 21$ кг, $m_0 = 6$ кг.

Пусть в третьем случае точка опоры была отодвинута на расстояние L от предыдущего положения. Тогда Маша сидит на расстоянии $60\text{ см} + L$ от точки опоры, первый заяц — на расстоянии $140\text{ см} - L$, второй — на расстоянии $110\text{ см} - L$, а третий — на расстоянии $80\text{ см} - L$. Запишем в третий раз правило моментов:

$$m_0 g \cdot (140\text{ см} - L) + m_0 g \cdot (110\text{ см} - L) + m_0 g \cdot (80\text{ см} - L) + Mg \cdot (40\text{ см} - L) = m_{\text{М}} g \cdot (60\text{ см} + L) \quad \Rightarrow$$

$$m_0 \cdot (330\text{ см} - 3L) + M \cdot (40\text{ см} - L) = m_{\text{М}} \cdot (60\text{ см} + L) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m_0 \cdot 330\text{ см} + M \cdot 40\text{ см} - m_{\text{М}} \cdot 60\text{ см}}{3m_0 + M + m_{\text{М}}} \approx 6{,}2\text{ см}.$$

Критерии:

1) Правильно записано правило моментов в первом случае	2 балла
2) Правильно записано правило моментов во втором случае	2 балла
3) Найдено верное значение массы бревна	1 балл
4) Найдено верное значение массы зайца	1 балл
5) Правильно записано правило моментов в третьем случае	2 балла
6) Найдено верное значение сдвига L	2 балла

Указание проверяющим:

1) Массу зайца, строго говоря, не обязательно вычислять явно. Поэтому, если пункт 6 критериев выполнен (оценён в 1 или 2 балла), то баллы за пункт 4 ставить автоматически.

2) В пункте 6 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за пункты 1-3 и 5 отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

Задача 9.4. Две ледяных вазы.

Экспериментатор Иннокентий Иванов создал в своей лаборатории две внешне совершенно одинаковые ледяные вазы. Теплоизолировав их снаружи, учёный быстро заполнил обе вазы до краёв водой при температуре 0 ℃. Какой была ёмкость и масса изготовленных Иннокентием ваз, если после установления теплового равновесия в первой вазе осталось 500 см^3 жидкой воды, а во второй — 640 см^3? Начальная температура первой вазы составляла −33 ℃, а у второй была −22 ℃. Удельная теплоёмкость льда равна 2100 Дж/(кг·℃), его удельная теплота плавления — 330 кДж/кг, а плотность — 900 кг/м^3.

Ответ: 1,8 кг, 920 см^3.

Решение: Пусть масса вазы равна M, а её ёмкость — V. Если вазу наполнить водой, то вода станет превращаться в лёд и частично выливаться наружу, так как плотность льда меньше плотности воды. Определим количество льда, образовавшегося в первой вазе:

$$\lambda m_1 = c_л M \cdot 33\,℃ \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{c_л M \cdot 33\,℃}{\lambda}.$$

С другой стороны, $m_1 = \rho_л(V - 500\text{ см}^3)$. Приравнивая, получим, что

$$V - 500\text{ см}^3 = \frac{c_л M \cdot 33\,℃}{\lambda \rho_л}.$$

Во втором случае запишем аналогичное равенство:

$$V - 640\text{ см}^3 = \frac{c_л M \cdot 22\,℃}{\lambda \rho_л}. \tag{9.4.1}$$

Вычитая найденные соотношения друг из друга, получим

$$140\text{ см}^3 = \frac{c_л M \cdot 11\,℃}{\lambda \rho_л} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\lambda \rho_л \cdot 140\text{ см}^3}{c_л \cdot 11\,℃} = \frac{330000\text{ Дж/кг} \cdot 900\text{ кг/м}^3 \cdot 0{,}00014\text{ м}^3}{2100\text{ Дж/(кг}\cdot℃) \cdot 11\,℃} = 1{,}8\text{ кг}.$$

Отсюда следует, что значение ёмкости V равно

$$V = 500\text{ см}^3 + \frac{c_л M \cdot 33\,℃}{\lambda \rho_л} = 500\text{ см}^3 + 420\text{ см}^3 = 920\text{ см}^3.$$

Критерии:

1) Правильно записано уравнение теплового баланса в первом случае . . . . 2 балла
2) Правильно записана связь между количеством образовавшегося льда и ёмкостью в первом случае . . 1 балл
3) Правильно записано уравнение теплового баланса во втором случае . . . . 2 балла
4) Правильно записана связь между количеством образовавшегося льда и ёмкостью во втором случае . 1 балл
5) Найдено верное значение массы вазы . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение ёмкости вазы . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Связь между количеством образовавшегося льда и ёмкостью может быть записана сразу внутри соответствующего уравнения теплового баланса (например, как в (9.4.1)). Если эта связь верная, то баллы за пункты 1, 2 и/или 3, 4 ставить.

Задача 9.5. За мёдом!

Винни-Пух как-то решил сделать воздушный шар для своих полётов за мёдом. Взяв у Кристофера Робина тонкий, нерастягивающийся и непроницаемый для газов материал оболочки и баллоны с гелием для её заполнения, он приступил к работе. Методом проб и ошибок Винни-Пух выяснил, что шар, заполненный гелием, начинает его поднимать, если радиус шара больше 2 м.

1. При каком минимальном радиусе шар поднимался бы без груза?
2. Какую максимальную массу мёда (вдобавок к самому Винни-Пуху) сможет поднять шар радиусом 2,5 м?

Масса Винни-Пуха равна 25 кг, плотность воздуха — 1,28 кг/м^3, плотность гелия — 0,18 кг/м^3. Объёмами медвежонка и мёда по сравнению с объёмом шара можно пренебречь. Каждый раз оболочка шара делается заново.

Примечание: Объём шара радиуса R равен $V = 4\pi R^3/3$, площадь сферы того же радиуса — $S = 4\pi R^2$, где $\pi \approx 3{,}14$.

Ответ: 1) 64 см; 2) 28,5 кг.

Решение: Пусть μ — поверхностная плотность материала оболочки (масса единицы площади). Тогда масса оболочки равна $\mu \cdot 4\pi R^2$, а масса гелия в шаре $\rho_\text{г} \cdot 4\pi R^3/3$. Рассмотрим первый случай, когда радиус шара равен $R_1 = 2$ м, и запишем условие плавания системы «шар+Винни-Пух» ($M_\text{ВП}$ — масса Винни-Пуха):

$$\rho_\text{в} g \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} = \rho_\text{г} g \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} + \mu \cdot 4\pi R_1^2 \cdot g + M_\text{ВП} g.$$

Отсюда найдём поверхностную плотность оболочки:

$$\mu = \frac{1}{4\pi R_1^2}\left((\rho_\text{в} - \rho_\text{г}) \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} - M_\text{ВП}\right) \approx 0{,}236 \text{ кг/м}^2. \qquad (9.5.1)$$

Пусть шар без груза поднимается при минимальном радиусе, равном r. Запишем снова условие плавания

$$\rho_\text{в} g \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \rho_\text{г} g \cdot \frac{4\pi r^3}{3} + \mu \cdot 4\pi r^2 \cdot g \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3\mu}{(\rho_\text{в} - \rho_\text{г})} \approx 64 \text{ см}.$$

Рассмотрим теперь шар радиусом $R_2 = 2{,}5$ м, на котором медвежонок поднимается вместе с мёдом массой m_0:

$$\rho_\text{в} g \cdot \frac{4\pi R_2^3}{3} = \rho_\text{г} g \cdot \frac{4\pi R_2^3}{3} + \mu \cdot 4\pi R_2^2 \cdot g + (M_\text{ВП} + m_0) g.$$

Из этого уравнения найдем массу m_0:

$$m_0 = (\rho_\text{в} - \rho_\text{г}) \cdot \frac{4\pi R_2^3}{3} - \mu \cdot 4\pi R_2^2 - M_\text{ВП} \approx 28{,}5 \text{ кг}.$$

Критерии:

1) Записано выражение для массы оболочки $\mu \cdot 4\pi R^2$ или аналог . . . . 1 балл
2) Правильно записано условие плавания в первом случае . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение/записана верная формула для μ (формула (9.5.1)) . . . . 1 балл
4) Правильно записано условие плавания во втором случае . . . . 2 балла
5) Получен верный ответ на первый вопрос . . . . 1 балл
6) Правильно записано условие плавания в третьем случае . . . . 2 балла
7) Получен верный ответ на второй вопрос . . . . 1 балл

Указания проверяющим:

1) Выражение для массы оболочки может быть сразу написано внутри условий плавания, в этом случае балл за пункт 1 ставить.

2) Учащийся может не вычислять числовое значение μ и не записывать явно формулу, но при этом найти верное значение r. Поэтому, если пункт 5 критериев выполнен, то балл за пункт 3 ставится автоматически.

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Перекидывание камней.

Из точек A и B, находящихся на одной горизонтальной поверхности, одновременно бросили два камня: первый — со скоростью $v = 15$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, второй — под углом $\beta = 60°$ (см. рис. 10.1). Через какое время после броска камни окажутся на одной вертикали, если в процессе дальнейшего движения первый камень упал в точке B, а второй, наоборот, в точке A? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

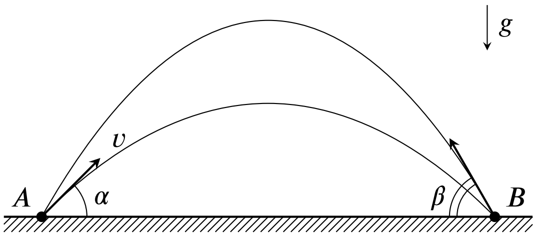


Рис. 10.1.

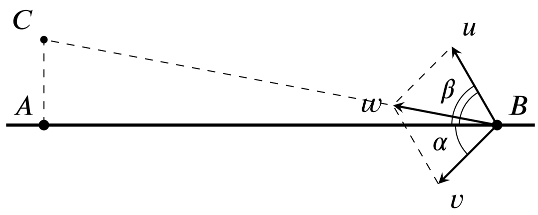


Рис. 10.2.

Ответ: 1,2 с.

Решение: Пусть второй камень бросили со скоростью u. Дальность полёта L равна, с одной стороны, $L = v^2 \sin 2\alpha/g = v^2/g$, а с другой стороны, $L = u^2 \sin 2\beta/g$. Так как дальности полётов обоих камней равны,

$$\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\beta}{g} \quad \Rightarrow \quad u = v\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}} = v\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Способ 1. Обозначим t искомое время, тогда

$$vt\cos\alpha + ut\cos\beta = L \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v\cos\alpha + u\cos\beta} = \frac{v^2/g}{v/\sqrt{2} + v/\sqrt{2\sqrt{3}}} = \frac{v}{g}\cdot\frac{1}{1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2\sqrt{3}}} \approx 1{,}2 \text{ с}.$$

Способ 2. Перейдём в систему отсчёта левого камня. В ней правый камень движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ (рис. 10.2). Обозначим t искомое время, а w_x — проекцию скорости камня на горизонталь. За время t правый камень в новой системе отсчёта должен оказаться над точкой A в точке C, то есть $L = w_x t$. Так как $w_x = v_x + u_x = v\cos\alpha + u\cos\beta$

$$L = w_x t = vt\cos\alpha + ut\cos\beta.$$

Дальнейшее решение совпадает с приведённым в Способе 1.

Критерии:

1) Записаны верные выражения для дальности полёта обоих камней . . . . 1 балл
2) Найдена верная связь между начальными скоростями камней . . . . 4 балла
3) Записано условие $vt\cos\alpha + ut\cos\beta = L$ или аналог . . . . 3 балла
4) Найдено верное значение искомого времени t . . . . 2 балла

Указания проверяющим:

1) Если учащийся записал только одно выражение для дальности (в дальнейшем решении второго варианта не обнаружено), балл за пункт 1 не ставить. В этом случае баллов за пункт 2 быть не должно, так как связь между скоростями не может быть получена.
2) В пункте 4 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за все предыдущие пункты отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

Задача 10.2. Кот и мышата.

Озорные мышата подкрались к спящему в точке O коту Леопольду, дёрнули его за усы и одновременно бросились бежать со скоростью v по двум взаимно перпендикулярным прямым (см. рис. 10.3). Проснувшись и сообразив, что происходит, Леопольд побежал со скоростью $5v$ вдогонку за первым мышонком, через время τ догнал его и сразу же побежал ко второму.

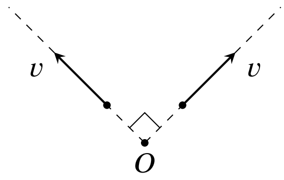


Рис. 10.3.

1. Через какое минимальное время после встречи с первым мышонком кот догонит второго?
2. Через какое минимальное время после встречи со вторым мышонком кот вернётся в точку O?

Скорость кота по величине не меняется.

Ответ: 1) $5\tau/3$; 2) $4\tau/3$.

Решение: Расстояние от точки A, в которой Леопольд поймал первого мышонка, до точки O равно $5v\tau$ (см. рис. 10.4). Пусть t — время погони за вторым мышонком, тогда расстояние AB, пройденное котом до встречи в точке B, равно $5vt$. Отсюда по теореме Пифагора

$$(vt + 5v\tau)^2 + (5v\tau)^2 = (5vt)^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 + 10\tau t + 50\tau^2 = 25t^2 \quad \Rightarrow \quad 24t^2 - 10\tau t - 50\tau^2 = 0.$$

Решая это уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получим, что $t = 5\tau/3$. Второй мышонок, таким образом, успел убежать от точки O на расстояние $s = OB = vt + 5v\tau = 20v\tau/3$, следовательно, время возвращения кота в точку O равно $t' = s/(5v) = 4\tau/3$.

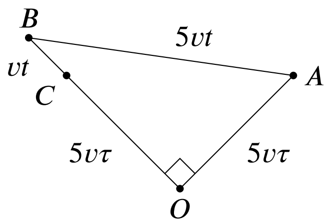


Рис. 10.4.

Критерии:

1) Найдено расстояние до места встречи с первым мышонком $OA = 5v\tau$ . . . . 2 балла
2) Записано верное уравнение для нахождения времени встречи t со вторым мышонком . . . . 3 балла
3) Найдено верное выражение для t . . . . 2 балла
4) Найдено расстояние до места встречи со вторым мышонком $OB = 20v\tau/3$ . . . . 2 балла
5) Найден верный ответ на второй вопрос . . . . 1 балл

Указание проверяющим: Требуемое в пункте 2 уравнение может быть отличным от авторского, но, тем не менее, корректным. Например, учащийся может записать теорему косинусов для треугольника ABC, найдя предварительно длину отрезка AC.

Задача 10.3. Авария в далёком космосе.

Однажды на Шаролёте, космическом корабле Смешариков, произошла авария, система отопления отключилась, и корабль стал остывать. Пин, поработав в своей мастерской, собрал автономный электрический обогреватель и включил его. В результате температура воздуха в Шаролёте установилась на отметке $t_1 = 7\,℃$. Решив, что в корабле холодно, Пин увеличил силу тока в цепи обогревателя вдвое, из-за чего новая температура воздуха внутри корабля стала $t_2 = 17\,℃$.

1. До какой температуры охладился бы воздух внутри Шаролёта, если бы Пин не собрал обогреватель?
2. Во сколько раз от **первоначального значения** нужно было увелить силу тока в обогревателе, чтобы он прогрел воздух до температуры $t_3 = 25\,℃$?

Считать, что температура воздуха внутри Шаролёта везде одинакова, а сопротивление обогревателя и тепловая мощность, выделяемая Смешариками постоянны. Мощность, отдаваемая телом в космический вакуум за счёт излучения, пропорциональна $(t + 273\,℃)^4$, где t — температура тела (в ℃).

Ответ: 1) 3,4 ℃; 2) 2,58 раза.

Решение: Пусть N_0 — суммарная тепловая мощность, выделяемая Смешариками, а $N = I^2R$ — мощность нагревателя при начальной силе тока. Так как в этом случае температура воздуха в Шаролёте равна t_1, $N_0 + I^2R = k(280\,℃)^4$, где k — неизвестный коэффициент. Во втором случае $N_0 + 4I^2R = k(290\,℃)^4$. Решая систему, получим, что

$$N_0 + 4I^2R = (290/280)^4(N_0 + I^2R) \quad \Rightarrow \quad N_0 + 4I^2R = 1{,}15N_0 + 1{,}15I^2R \quad \Rightarrow \quad N_0 = 19I^2R.$$

Пусть t_0 — температура в Шаролёте, если обогреватель не включён. Тогда $N_0 = k(t_0 + 273\,℃)^4$. Подставляя найденное выражение для N_0 и исключая k, получим

$$\frac{(t_0 + 273\,℃)^4}{(280\,℃)^4} = \frac{19I^2R}{20I^2R} \quad \Rightarrow \quad t_0 + 273\,℃ = 280\,℃ \cdot \sqrt[4]{\frac{19}{20}} \approx 276{,}4\,℃ \quad \Rightarrow \quad t_0 = 3{,}4\,℃.$$

В третьем случае $N_0 + I_3^2R = k(298\,℃)^4$, где I_3 — сила тока в обогревателе, откуда следует, что

$$\frac{298^4}{280^4} = \frac{19I^2R + I_3^2R}{20I^2R} \quad \Rightarrow \quad 1{,}283 = \frac{19}{20} + \frac{I_3^2}{20I^2} \quad \Rightarrow \quad I_3 = 2{,}58I.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $N_0 + I^2R = k(280\,℃)^4$ или аналог . . . . 2 балла
2) Записано уравнение $N_0 + 4I^2R = k(290\,℃)^4$ или аналог . . . . 2 балла
3) Найдена верная связь между мощностью Смешариков и обогревателя . . . . 1 балл
4) Найден верный ответ на первый вопрос . . . . 2 балла
5) Записано уравнение $N_0 + I_3^2R = k(298\,℃)^4$ или аналог . . . . 1 балл
6) Найден верный ответ на второй вопрос . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) В зависимости от точности расчётов, учащийся может получить слегка отличные значения, например: $(290/280)^4 \approx 1{,}151$, $N_0 = 18{,}9I_0^2R$. На числовые значения ответов на вопросы задачи это почти не влиет.
2) В пункте 4 ответ может быть дан в кельвинах: $t_0 = 276{,}4$ К или даже $t_0 = 276$ К. В этом случае баллы за этот пункт не снижать, если есть явное упоминание кельвинов как единиц измерения.

Задача 10.4. Нелинейные элементы.

Физик-экспериментатор Иннокентий Иванов собрал электрическую цепь, состоящую из соединённых последовательно нелинейного элемента X, резистора сопротивлением R, идеального амперметра, ключа и источника постоянного напряжения $U_0 = 24$ В. После замыкания ключа амперметр показал значение $I_1 = 500$ мА. Учёный разомкнул цепь и подсоединил параллельно к элементу X второй, точно такой же нелинейный элемент. После повторного замыкания ключа амперметр показал значение $I_2 = 640$ мА.

1. Определите сопротивление резистора R.
2. Какое значение показал бы амперметр, если бы в цепи нелинейные элементы были соединены последовательно?

Известно, что сила тока, проходящего через элемент X, пропорциональна квадрату приложенного к нему напряжения, то есть $I \sim U^2$. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Ответ: 1) 20 Ом; 2) 237 мА.

Решение: Пусть зависимость силы тока через нелинейный элемент от напряжения на нём задаётся формулой $I = kU^2$, где k — неизвестный коэффициент. В первом случае $U_0 = I_1 R + \sqrt{I_1/k}$. Во втором случае через один нелинейный элемент течёт ток $I_2/2$, поэтому $U_0 = I_2 R + \sqrt{I_2/(2k)}$. Исключая отсюда k, получим, что

$$\frac{U_0 - I_2 R}{U_0 - I_1 R} = \sqrt{\frac{I_2}{2I_1}} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad U_0 - I_2 R = 0{,}8U_0 - 0{,}8 I_1 R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{0{,}2U_0}{I_2 - 0{,}8I_1} = 20 \text{ Ом}.$$

Коэффициент k, соответственно, равен

$$k = \frac{I_1}{(U_0 - I_1 R)^2} = \frac{0{,}5 \text{ А}}{(24 \text{ В} - 10 \text{ В})^2} = \frac{1}{392} \text{ А/В}^2.$$

Если нелинейные элементы соединены последовательно, то в цепи течёт ток I_3, который определяется уравнением $U_0 = I_3 R + 2\sqrt{I_3/k}$. Решая его, найдём, что

$$\sqrt{I_3} = \frac{-1 + \sqrt{1 + RU_0 k}}{R\sqrt{k}} \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{(-1 + \sqrt{1 + RU_0 k})^2}{R^2 k} \approx 0{,}237 \text{ А}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $U_0 = I_1 R + \sqrt{I_1/k}$ или аналогичное для первого случая . . . . 2 балла
2) Записано уравнение $U_0 = I_2 R + \sqrt{I_2/(2k)}$ или аналогичное для второго случая . . . . 2 балла
3) Найдено верное значение сопротивления R . . . . 2 балла
4) Записано уравнение $U_0 = I_3 R + 2\sqrt{I_3/k}$ или аналогичное для третьего случая . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение силы тока в третьем случае . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

В пункте 5 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за все предыдущие пункты отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

Задача 10.5. Под углом.

Систему из двух брусков одинаковой массы $m = 0{,}7$ кг, находящихся на горизонтальной поверхности, тянут вправо, прикладывая горизонтальную силу $F = 5$ Н. Найдите ускорение системы, если коэффициент трения между левым бруском и поверхностью равен $\mu = 2/5$, а между правым бруском и поверхностью трение отсутствует. Нить, соединяющая бруски, образует угол α с горизонталью (см. рис. 10.5), такой, что $\sin\alpha = 5/13$. Нить считать невесомой и нерастяжимой, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

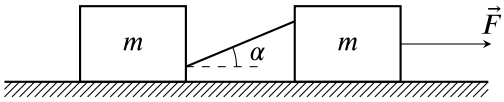


Рис. 10.5.

Ответ: 2 м/с^2.

Решение: Пусть a — ускорение системы, а T — сила натяжения нити. Запишем 2й закон Ньютона для правого тела в проеции на горизонтальную ось:

$$ma = F - T\cos\alpha = F - 12T/13.$$

Для левого тела также запишем 2й закон Ньютона в проекции на обе оси: горизонтальную Ox и вертикальную Oy (здесь N — сила реакции опоры, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, действующие на левый брусок)

$$(Ox)\quad ma = T\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 12T/13 - F_{\text{тр}}, \qquad (Oy)\quad 0 = N - mg + T\sin\alpha = N - mg + 5T/13.$$

Если система движется, $F_{\text{тр}} = \mu N$. Отсюда

$$ma = 12T/13 - \mu(mg - 5T/13) = 12T/13 - 2mg/5 + 2T/13 = 14T/13 - 2mg/5.$$

Сопоставляя это с первым уравнением, получим

$$F - 12T/13 = 14T/13 - 2mg/5 \quad \Rightarrow \quad T = F/2 + mg/5 = 2{,}5\text{ Н} + 1{,}4\text{ Н} = 3{,}9\text{ Н}.$$

Ускорение системы, соответственно, равно

$$a = \frac{F - 12T/13}{m} = \frac{5\text{ Н} - 3{,}6\text{ Н}}{0{,}7\text{ кг}} = 2\text{ м/с}^2.$$

Критерии:

1) Правильно записан 2й ЗН для правого тела в горизонтальной проекции $ma = F - T\cos\alpha$ . . . . 2 балла
2) Правильно записан 2й ЗН для левого тела в горизонтальной проекции $ma = T\cos\alpha - F_{\text{тр}}$ . . . . 3 балла
3) Найдено верное выражение для силы реакции у левого бруска $N = mg - T\sin\alpha$ . . . . 3 балла
4) Найдено верное значение ускорения . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Космическая одиссея.

Рис. 11.1.

Как-то раз Крош оказался в ракете, построенной Пином (рис. 11.1). Заметив, что ракета взлетает, Крош стал, чтобы привлечь внимание, с интервалом $\tau = 1$ с выбрасывать в иллюминатор разные предметы, которые смог найти внутри. На каком расстоянии друг от друга эти предметы будут падать на землю, если начальная скорость всех предметов **относительно ракеты** равна $v = 12$ м/с и направлена горизонтально. Ракета взлетает с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать, а поверхность земли считать горизонтальной.

Ответ: 19 м.

Решение: Пусть ракета к моменту, когда Крош выкинул первый предмет, взлетала в течение времени T. Высота, на которую она поднялась, $H = aT^2/2$, а её скорость $u = aT$. Тело, выброшенное Крошем, относительно земли имеет скорость, горизонтальная проекция которой равна v, а вертикальная — u. Если t — время падения, то

$$0 = H + ut - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{gt^2}{2} - aTt - \frac{aT^2}{2} = 0.$$

Решая это уравнение, получим, что $t = T \cdot (a + \sqrt{a^2 + ga})/g$. Так как Крош бросает предметы с интервалом τ, время их падения отличается на

$$\Delta t = \frac{a + \sqrt{a^2 + ga}}{g} \cdot \tau. \tag{11.1.1}$$

Дальность полёта предметов определяется как $L = vt$, следовательно, они будут падать на расстоянии

$$\Delta L = v\Delta t = v\tau \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 + ga}}{g} = 12\text{ м} \cdot \frac{6 + \sqrt{96}}{10} \approx 19\text{ м}$$

друг от друга.

Критерии:

1) Записано верное выражение для высоты, с которой выброшен предмет . . . . 1 балл
2) Записано верное выражение для скорости ракеты в этот момент . . . . 1 балл
3) Найдена верная связь разницы времени полёта Δt двух соседних предметов и τ (формула 11.1.1) . . 3 балла
4) Записано, что $\Delta L = v\Delta t$, или аналогичное выражение . . . . 1 балл
5) Найдена верная связь между ΔL и τ . . . . 2 балла
6) Получено верное числовое значение ΔL . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

Если учащийся использует отличный от авторского, но корректный способ решения (например, переход в систему отсчёта ракеты), то при получении правильного выражения в п.3, баллы за пункт 1 и 2 ставить автоматически.

Задача 11.2. Толкай сильнее!

На гладкой горизонтальной поверхности находится система, состоящая из бруска массой $M = 3$ кг с прикреплённым к нему невесомым блоком и груза массой $m = 0{,}5$ кг, привязанного с помощью нити к стене. С каким ускорением будет двигаться брусок, если его толкать с силой $F = 13$ Н, направленной вправо (см. рис. 11.2)? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Между бруском и грузом, а также в оси блока трения нет. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

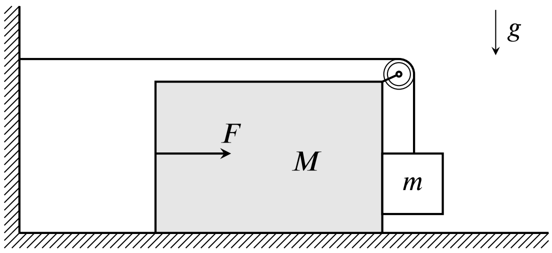


Рис. 11.2.

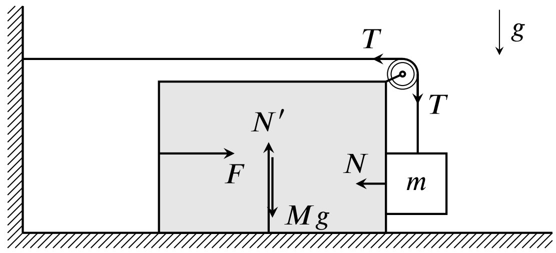


Рис. 11.3.

Ответ: 2 м/с^2.

Решение: Пусть a — ускорение бруска, тогда у груза ускорение имеет две составляющие, вертикальную (направленную вверх) и горизонтальную, равные по модулю a. Запишем 2й закон Ньютона для груза (N — сила взаимодействия груза и бруска, T — сила натяжения нити):

$$ma = N, \qquad ma = T - mg.$$

Изобразим силы, действуюшие на брусок (рис. 11.3) и запишем 2й закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$Ma = F - T - N.$$

Выражая T и N из предыдущих уравнений, получим

$$Ma = F - ma - mg - ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F - mg}{M + 2m} = \frac{13\ \text{Н} - 5\ \text{Н}}{4\ \text{кг}} = 2\ \text{м/с}^2.$$

Критерии:

1) Указано, что горизонтальная составляющая ускорения груза равна ускорению бруска a . . . . 1 балл
2) Указано, что вертикальная составляющая ускорения груза равна a и направлена вверх . . . . 2 балла
3) Правильно записан 2й закон Ньютона для груза в проекции на вертикальную ось . . . . 1 балл
4) Правильно записан 2й закон Ньютона для груза в проекции на горизонтальную ось . . . . 1 балл
5) Правильно записан 2й закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось . . . . 3 балла
6) Найдено верное значение ускорения бруска a . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Баллы в пунктах 1 и 2 ставить за само наличие данного утверждения (например, в виде чертежа). Если из чертежа или дальнейшего текста решения учащегося не ясно, какие именно составляющие у ускорения груза, баллы не ставить.

2) Если в пунктах 3-5 уравнения записаны с неверно связанными между собой ускорениями, но с правильными силами, баллы за соответствующие пункты ставить.

Задача 11.3. Ток между конденсаторами.
Цепь, изображённая на рис. 11.4, состоит из двух конденсаторов с ёмкостями C и $2C$, резистора и ключа K. Вначале конденсатор ёмкостью $2C$ не заряжен, а ключ разомкнут. После того как ключ замкнули, выяснилось, что когда заряд конденсатора $2C$ равен Q, сила тока через резистор равна I_0, а когда заряд стал равен $2Q$, сила тока через резистор упала до $I_0/3$.
1. Каков был заряд конденсатора ёмкостью C до замыкания ключа?
2. Определите силу тока через резистор сразу после замыкания ключа.
3. Какие заряды установятся на конденсаторах в результате перезарядки?
Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

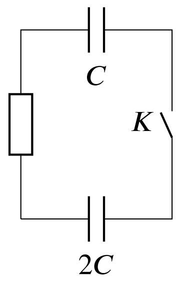


Рис. 11.4.

Ответ: 1) $15Q/4$; 2) $5I_0/3$; 3) $5Q/4$ и $5Q/2$.

Решение: Пусть Q_0 — начальный заряд конденсатора C. В первом случае, когда заряд на конденсаторе $2C$ равен Q, первый конденсатор разрядился до заряда $Q_0 - Q$. Напряжение на первом конденсаторе равно сумме напряжений на втором конденсаторе и на резисторе:

$$\frac{Q_0 - Q}{C} = I_0 R + \frac{Q}{2C} \quad \Rightarrow \quad Q_0 = C I_0 R + \frac{3Q}{2}. \tag{11.3.1}$$

Аналогично, во втором случае

$$\frac{Q_0 - 2Q}{C} = \frac{I_0 R}{3} + \frac{2Q}{2C} \quad \Rightarrow \quad Q_0 = \frac{C I_0 R}{3} + 3Q. \tag{11.3.2}$$

Решая систему, получим: $C I_0 R = 9Q/4$, $Q_0 = 15Q/4$.
Сразу после замыкания ключа второй конденсатор не заряжен, поэтому

$$\frac{Q_0}{C} = IR \quad \Rightarrow \quad \frac{15Q}{4C} = I \cdot \frac{9Q}{4C I_0} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{5I_0}{3}.$$

В установившемся режиме заряд Q_0 поделится между конденсаторами:

$$\frac{Q_0 - Q_2}{C} = \frac{Q_2}{2C} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{2Q_0}{3} = \frac{5Q}{2}, \quad Q_1 = Q_0 - Q_2 = \frac{5Q}{4}.$$

Критерии:
1) Записано условие (11.3.1) для первого случая или его аналог . . . . 2 балла
2) Записано условие (11.3.2) для второго случая или его аналог . . . . 2 балла
3) Записано условие равенства напряжений в момент замыкания ключа $Q_0/C = IR$ . . . . 2 балла
4) Найдено выражение для начального заряда первого коонденсатора $Q_0 = 15Q/4$ . . . . 1 балл
5) Найдено выражение для силы тока сразу после замыкания ключа $I = 5I_0/3$ . . . . 1 балл
6) Найдены выражения для установившихся зарядов $Q_1 = 5Q/4$ и $Q_2 = 5Q/2$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:
Если в пункте 6 по каким-то причинам одно значение найдено верно, а другое — нет, ставить 1 балл из 2.

Задача 11.4. Поршень на пружине.

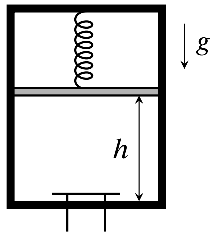


Рис. 11.5.

В вертикальном цилиндрическом теплоизолированном сосуде находится горизонтальный поршень массой $m = 10$ кг, прикреплённый с помощью лёгкой пружины к его верхней стенке, и расположенный у нижнего основания миниатюрный нагреватель. Под поршнем находится идеальный одноатомный газ, а над поршнем — вакуум. В начальном положении поршень расположен на высоте $h = 80$ см от нижнего основании (см. рис. 11.5), пружина не деформирована. Определите жёсткость пружины k, если после передачи газу количества теплоты $Q = 130$ Дж, поршень поднялся на высоту $h/4$. Трением между поршнем и стенками пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 250 Н/м.

Решение: В начальном положении давление газа под поршнем равно $p_0 = mg/S$, где S — площадь поршня. Если же в результате нагревания поршень поднялся на высоту $h/4$, давнение газа под ним стало $p = p_0 + kh/(4S)$, а объём газа $V = 5Sh/4$. Работа по подъёму поршня на высоту $h/4$ определяется как изменение потенциальных энергий поршня и пружины

$$A = \frac{mgh}{4} + \frac{kh^2}{32},$$

в то время как изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}(pV - p_0Sh) = \frac{3}{2}\left(\frac{p_0Sh}{4} + \frac{5kh^2}{16}\right) = \frac{3mgh}{8} + \frac{15kh^2}{32}.$$

Отсюда получим, что

$$Q = \Delta U + A = \frac{5mgh}{8} + \frac{kh^2}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{h^2}\left(Q - \frac{5mgh}{8}\right) = 250 \text{ Н/м}.$$

Критерии:

1) Найдена верная связь между начальным давлением газа p_0 и массой поршня . . . . 1 балл
2) Записано выражение для конечного давления газа $p = p_0 + kh/4S$ . . . . 1 балл
3) Записано верное выражение для работы газа A . . . . 2 балла
4) Записано верное выражение для внутренней энергии газа . . . . 2 балла
5) Записано верное выражение для Q через величины, данные в условии . . . . 2 балла
6) Найдено верное числовое значение для k . . . . 2 балла

Указание проверяющим:
1) В пункте 3 баллы ставятся, если учащийся привёл правильную формулу, содержащую только величины, данные в условии и найденные в процессе решения (например, p_0 или p). Абстрактные выражения, например, $A = \int pdV$, не оцениваются.
2) В пункте 4 баллы ставятся, если учащийся привёл правильную формулу, содержащую только величины, данные в условии и найденные в процессе решения (например, p_0 или p). Абстрактные выражения, например, $\Delta U = 3\nu R\Delta T/2$, не оцениваются.
3) В пункте 6 в случае незначительной ошибки в счёте (если баллы за все предыдущие пункты отличны от нуля) можно ставить 1 балл из 2.

Задача 11.5. Разлёт шайб.
На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две одинаковые шайбы радиуса R. На них со скоростью v налетает третья шайба, имеющая радиус $r = R/3$, причём её центр движется по прямой, являющейся серединным перпендикуляром отрезка, соединяющего центры покоящихся шайб (см. рис. 11.6). Найдите скорость, с которой будет двигаться третья шайба после абсолютно упругого столкновения. Все шайбы гладкие, сделаны из одинакового однородного материала и имеют одну и ту же высоту.

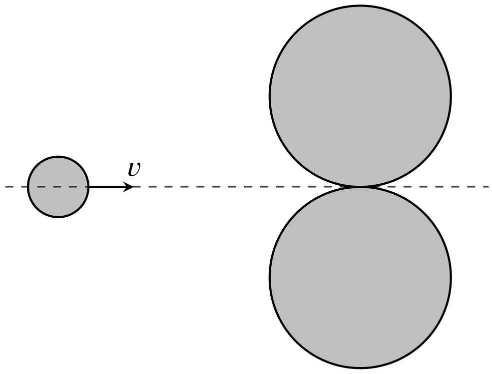


Рис. 11.6.

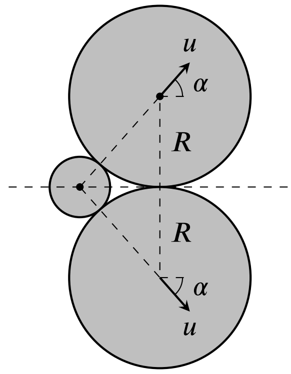


Рис. 11.7.

Ответ: $55v/71$.

Решение: Пусть v' и u — скорости маленькой и больших шайб после удара. Так как шайбы гладкие, скорость, которую приобретёт большая шайба, будет направлена по прямой, соединяющей центры маленькой и большой шайбы (рис. 11.7). Угол α между вектором $\vec{u}$ и горизонталью (осью симметрии) определяется из условия $\sin\alpha = R/(R + R/3) = 3/4$. Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонталь, учитывая, что большая шайба в 9 раз тяжелее маленькой:

$$mv = -mv' + 2\cdot 9mu\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad v + v' = 18u\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + 2\cdot\frac{9mu^2}{2} \quad\Rightarrow\quad v^2 - v'^2 = 18u^2.$$

Выражая из первого уравнения скорость u и подставляя во второе, получим

$$v^2 - v'^2 = 18\cdot\frac{16}{7\cdot 18^2}(v+v')^2 \quad\Rightarrow\quad v - v' = \frac{8}{63}\cdot(v+v') \quad\Rightarrow\quad v' = \frac{55v}{71} \approx 0{,}775v.$$

Критерии:
1) Указано, что скорость большой шайбы после удара направлена по линии, соединяющие центры шайб . . . . . . 1 балл
2) Правильно найден угол между скоростью u и осью симметрии . . . . 2 балла
3) Указано, что масса большой шайбы в 9 раз больше массы маленькой . . . . 1 балл
4) Правильно записан закон сохранения импульса в проекции на ось симметрии . . . . 2 балла
5) Правильно записан закон сохранения энергии . . . . 1 балл
6) Найдено верное выражение для скорости v' . . . . 3 балла

Указание проверяющим:
1) Балл в пункте 1 ставить за само наличие данного утверждения (например, в виде чертежа). Если из чертежа или дальнейшего текста решения учащегося не ясно, как конкретно направлен вектор скорости, балл не ставить.
2) В пункте 2 достаточно найти синус или иную функцию угла. Если угол найден верно, балл за предыдущий пункт должен быть также поставлен.
3) В пункте 4 баллы ставить за ЗСИ, записанный в проекции на ось симметрии, причём подстановка соотношения между массами и числового значения угла не обязательна. Если ЗСИ записан только в векторной форме, баллы не ставить.
4) В пункте 5 подстановка соотношения между массами не обязательна.
5) В пункте 6, если учащийся выбрал противоположное авторскому направление скорости v' и оставил в ответе знак минус ($v' = -55v/71$), такой ответ засчитывать как верный.

Максимально возможный балл в 11 классе 50